

Лекция 9

СБОРКА, СВЯЗЬ С РАЗНОСТНЫМИ СХЕМАМИ

По построенным в предыдущей лекции матрицам жесткости $K^{(i)}$ и векторам нагрузки $\mathbf{F}^{(i)}$ конечных элементов $e^{(i)}$ теперь необходимо собрать глобальную матрицу жесткости $K_{(f)}$ и глобальный вектор нагрузки $\mathbf{F}_{(f)}$. Общая технология сборки была описана в лекции 5. Там же и в лекции 6 были приведены примеры сборки для случая обыкновенного дифференциального уравнения. Полагаю, что имевшая место некоторая нарочитость процесса сборки в этих лекциях перестанет выглядеть таковой для примера, рассматриваемого в этой лекции.

1. Пример

Применим процедуры сборки $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$ к построению системы уравнений МКЭ для задачи (8.1)–(8.3) в области Ω , изображенной на рис. 1. Будем предполагать, что триангуляция Ω осуществлена согласно рис. 2, т.е. конечными элементами $e^{(i)}$ является равнобедренные прямоугольные треугольники с узлами в вершинах. Нумерация элементов и узлов также изображена на рис. 2. В рассматриваемом примере $N = N(h) = 6$, $\dim \mathbf{u}^{(i)} = 3$, $\dim \mathbf{U}_{(f)} = 7$. Введем на конечных элементах локальную нумерацию узлов согласно рис. 3. Поскольку все конечные элементы одинаковые,

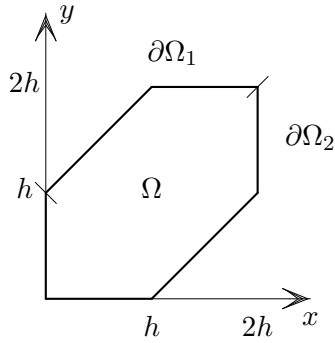


Рис. 1

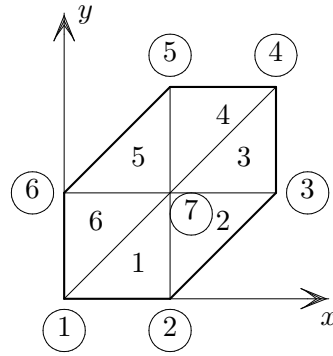


Рис. 2

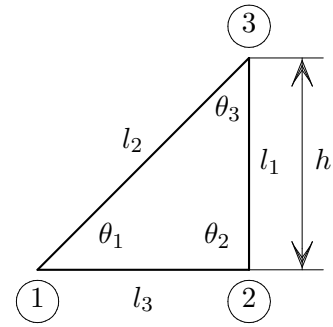


Рис. 3

то, в силу (8.23), одинаковыми будут и их матрицы жесткости,^{*)} а также и векторы нагрузки при $f(x, y) = \text{const}$. Так как

$$l_1 = h, \quad l_2 = \sqrt{2}h, \quad l_3 = h, \\ \cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \theta_2 = 0, \quad \cos \theta_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad S = \frac{h^2}{2},$$

то, согласно (8.23), (8.22) матрица жесткости и вектор нагрузки рассматриваемого элемента суть

$$K^{(i)} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}^{(i)} = \frac{fh^2}{6} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

При построении матрицы индексов L , элементы которой определяются из соотношений (5.14), примем во внимание, что локальная нумерация узлов на элементах (см. рис. 3) начинается с острого угла, затем идет прямой угол, а обход осуществляется против хода часовой стрелки. Из сказанного и рис. 2 и 3 следует, что

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 4 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 7 & 6 \\ 7 & 2 & 4 & 7 & 5 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Соотношения (1) и (2) полностью определяют глобальную матрицу жесткости $K_{(f)}$ и глобальный вектор нагрузки $\mathbf{F}_{(f)}$.

^{*)} При соответствующей нумерации узлов.

Построим $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$. Из (5.15) и (5.16) следует, что вклад матрицы $K^{(1)}$ в $K_{(f)}$ и вектора $\mathbf{F}^{(1)}$ в $\mathbf{F}_{(f)}$ определяется элементами первого столбца матрицы индексов (2) и осуществляется следующим образом: элемент $K^{(1)}(1, 1)$ прибавляется к элементу из первой строки и первого столбца формируемой матрицы $K_{(f)}$. (Запишем это так: $(1, 1) \rightarrow (1, 1)$), элемент $K^{(1)}(2, 1)$ прибавляется к элементу из второй строки и первого столбца $(2, 1) \rightarrow (2, 1)$, а $K^{(1)}(3, 1)$ – к элементу седьмой строки первого столбца $(3, 1) \rightarrow (7, 1)$ и т.д. Полный список перемещений элементов матрицы $K^{(1)}$ и вектора $\mathbf{F}^{(1)}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} (1, 1) &\rightarrow (1, 1) & (1, 2) &\rightarrow (1, 2) & (1, 3) &\rightarrow (1, 7) & (1) &\rightarrow (1) \\ (2, 1) &\rightarrow (2, 1) & (2, 2) &\rightarrow (2, 2) & (2, 3) &\rightarrow (2, 7) & (2) &\rightarrow (2) \\ (3, 1) &\rightarrow (7, 1) & (3, 2) &\rightarrow (7, 2) & (3, 3) &\rightarrow (7, 7) & (3) &\rightarrow (7). \end{aligned}$$

Тем самым, матрица $\mathbf{S}^{(1)T} K^{(1)} \mathbf{S}^{(1)}$ и вектор $\mathbf{S}^{(1)T} \mathbf{F}^{(1)}$ из (4.19), (4.20) суть

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \boxed{1} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \\ \boxed{-1} & \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix}, \quad \frac{fh^2}{6} \begin{bmatrix} \boxed{1} \\ \boxed{1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \boxed{1} \end{bmatrix},$$

где в прямоугольники заключены элементы $K^{(1)}$ и $\mathbf{F}^{(1)}$.

На рис. 4 изображен процесс сборки $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$. Каждая ячейка, отведенная на этом рисунке для элементов $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$ (изображена жирными линиями) разбита на шесть клеточек, (по числу элементов в Ω), и вклад в $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$ от $K^{(i)}$ и $\mathbf{F}^{(i)}$ (с точностью до множителей $1/2$ у $K^{(i)}$ и $fh^2/6$ у $\mathbf{F}^{(i)}$) изображен в соответствующей клеточке, которые сопоставлены элементам $e^{(i)}$ согласно рис. 5. Описанному выше этапу сборки — вкладу элемента $e^{(1)}$ — отведены верхние левые клеточки в каждой ячейке, а элементы $K^{(1)}$ и $\mathbf{F}^{(1)}$ размещены в тех из них, которые имеют штриховку.

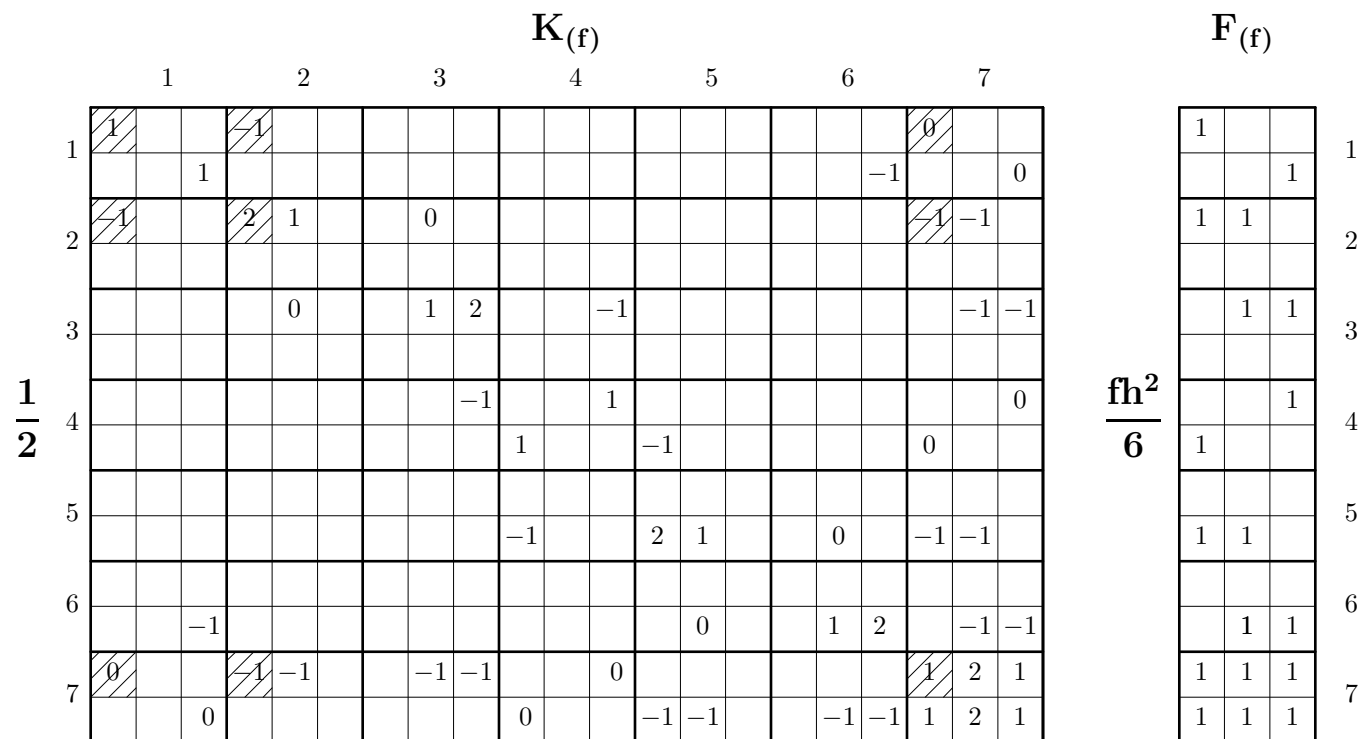


Рис. 4

1	2	3
4	5	6

Рис. 5

Вклад в $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$ от остальных элементов осуществляется аналогично. Для визуализации сборки может оказаться полезным и далее выписывать таблицы новых позиций элементов $K^{(i)}$ и $\mathbf{F}^{(i)}$. Эти таблицы строятся из надлежащим образом повторенных элементов соответствующих столбцов L . Например, для элемента $e^{(2)}$ процесс формирования таблицы таков:

$$\begin{array}{ccccccccc} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 33 & 37 & 32 \\ 7 \rightarrow & 7 & 7 \rightarrow & 7 & 7 & 7 \rightarrow & 7 & 7 & 7 \rightarrow \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 33 & 37 & 32 & (3, 3) & (3, 7) & (3, 2) \\ 73 & 77 & 72 & \rightarrow (7, 3) & (7, 7) & (7, 2). \\ 2 & 2 & 2 & (2, 3) & (2, 7) & (2, 2) \end{array}$$

Если у нас вдруг появилась необходимость решения задачи в области Ω , изображенной на рис. 6, с триангуляцией и нумерацией узлов как на рис. 7, то в уже построенных $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$ нужно произвести лишь

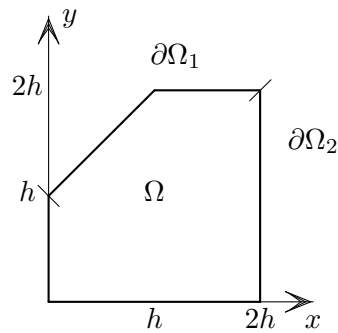


Рис. 6

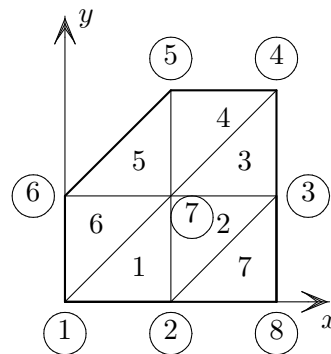


Рис. 7

небольшие изменения: увеличить размеры $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$ с семи до восьми и учесть вклад от нового элемента $e^{(7)}$. На рис. 8 изображена картинка, перенесенная с рис. 4, к которой пририсованы новые позиции для новых

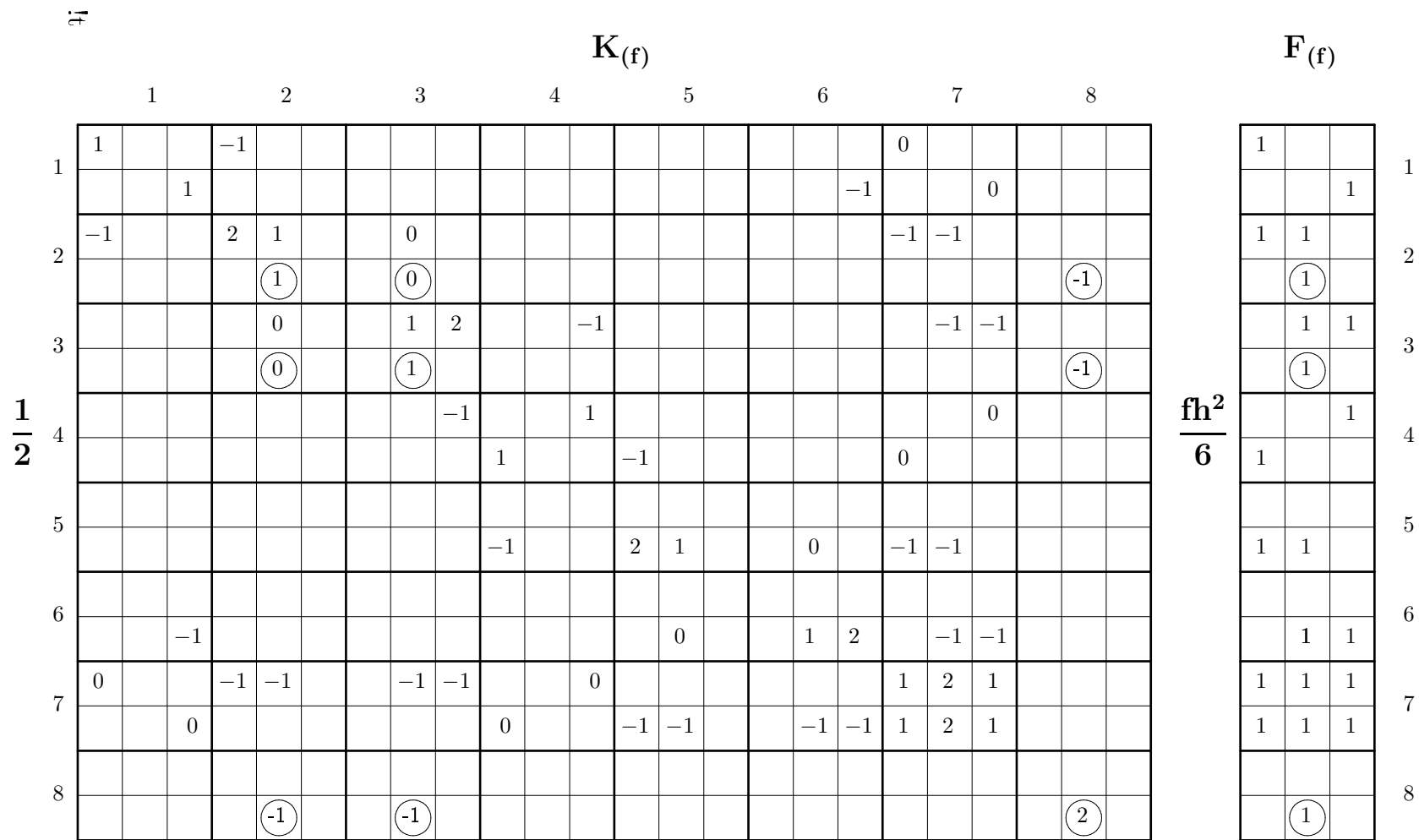


Рис. 8

элементов новых $K_{(f)}$ и $F_{(f)}$. Вклад от $e^{(7)}$ изображен числами в кружках, что полностью соответствует дополнительному, по сравнению с (2), столбцу новой матрицы индексов

$$L = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 3 & 7 & 4 & 6 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 3 & 5 & 7 & 6 & 8 \\ 7 & 2 & 4 & 7 & 5 & 1 & 3 \end{array} \right]. \quad (3)$$

В результате имеем следующую систему уравнений

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cccccc|cc} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1/2 & 0 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2 & 0 & -1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3/2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]}_{K_{(f)}} \underbrace{\left[\begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{array} \right]}_{U_{(f)}} = \frac{fh^2}{6} \underbrace{\left[\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 6 \\ 1 \end{array} \right]}_{F_{(f)}}. \quad (4)$$

Осталось "снять флажки". Для этого нужно учесть граничные условия. Из рис. 6 и 7 следует, что узлы с номерами 4, 5 и 6 принадлежат участку границы $\partial\Omega_1$, где заданы граничные условия первого рода, т.е. главные граничные условия. Тем самым, соответствующие уравнения в (4) (именно, четвертое, пятое и шестое) неправильные и должны быть отброшены, а неизвестным u_4 , u_5 и u_6 приписаны заданные на $\partial\Omega_1$ значения. Так как по условию u на $\partial\Omega_1$ равняется нулю, то и $u_4 = u_5 = u_6 = 0$, что соответствует вычеркиванию в оставшейся части матрицы $K_{(f)}$ четвертого, пятого и шестого столбцов. На $\partial\Omega_2$ заданы однородные граничные условия второго рода. Эти условия являются естественными. Более того, они не вносят возмущений ни в билинейную форму $a(u, v)$, порожденную оператором Лапласа, ни в линейную форму $l(v)$, порожденную правой частью уравнения (8.1). Тем самым, никаких изменений в матрицу $K_{(f)}$ и вектор $F_{(f)}$ эти граничные условия не вносят, и окончательный вид системы уравнений таков:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 2 & 0 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & -1/2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix} = fh^2 \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 1/6 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если бы на $\partial\Omega_2$ или на ее части $\partial\Omega'_2 \subset \partial\Omega_2$ вместо однородного граничного условия второго рода было задано неоднородное граничное условие третьего рода, т.е. условие

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \kappa u = g, \quad (x, y) \in \partial\Omega'_2,$$

то это внесло бы возмущение и в билинейную форму (8.5) и в линейную форму (8.6). Именно, новая билинейная форма, обозначенная через $a_1(u, v)$, имела бы вид

$$a_1(u, v) = a(u, v) + \int_{\partial\Omega'_2} \kappa uv ds,$$

а новая линейная форма —

$$l_1(v) = l(v) + \int_{\partial\Omega'_2} gv ds,$$

где $a(u, v)$ и $l(v)$ задаются (8.5) и (8.6). Эти возмущения должны были быть приняты во внимание при "снятии флажков" у $K_{(f)}$ и $\mathbf{F}_{(f)}$.

Пусть, например, Ω такова, как на рис. 6

$$\partial\Omega'_2 = [(x, y)|y = 0, \quad 0 < x < 2h],$$

а κ и g постоянные. Тогда возмущающие добавки отразятся на матрицах жесткости и векторах нагрузки первого и седьмого элементов (см. рис. 7). Именно, к матрицам и векторам этих элементов (1) добавятся матрицы

$$\begin{aligned}
K_{\varkappa}^{(1)} &= \int_0^h \varkappa \begin{bmatrix} \zeta_1(x, 0) \\ \zeta_2(x, 0) \\ \zeta_3(x, 0) \end{bmatrix} [\zeta_1(x, 0) \quad \zeta_2(x, 0) \quad \zeta_3(x, 0)] dx = \\
&= h\varkappa \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 \\ 1/6 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = K_{\varkappa}^{(7)}
\end{aligned}$$

и векторы

$$\mathbf{F}_g^{(1)} = \int_0^h g \begin{bmatrix} \zeta_1(x, 0) \\ \zeta_2(x, 0) \\ \zeta_3(x, 0) \end{bmatrix} dx = gh \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{F}_g^{(7)}.$$

С учетом (3) результирующая матрица, которая должна быть добавлена к $K_{(f)}$, есть

$$\frac{h\varkappa}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

а результирующий вектор, который должен быть добавлен к $\mathbf{F}_{(f)}$, —

$$\frac{gh}{2} [1 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T.$$

2. СВЯЗЬ С РАЗНОСТНЫМИ СХЕМАМИ

Посмотрим на уравнения системы (4) с точки зрения теории разностных схем. Несмотря на то, что вид большинства уравнений этой системы тесным образом связан с видом области Ω , можно усмотреть и общие закономерности. Переход от области Ω , изображенной на рис. 1, к области, изображенной на рис. 6, привел к видоизменению второго и третьего

уравнений (см. рис. 8). Связано это с тем, что узлы с номерами 2 и 3 являются узлами нового (седьмого) элемента. Нетрудно понять, что еще большее расширение области Ω может привести к изменению всех уравнений системы (4), за исключением седьмого: в отличие от узлов 1 – 6 и 8 узел с номером 7 не может принадлежать (без изменения триангуляции) никаким конечным элементам, кроме тех, которые изображены на рис. 2. Отсюда следует, что, если рис. 2 рассматривать всего лишь как фрагмент триангуляции какой-либо области, то уравнение с номером 7 из (4) все равно будет иметь тот же вид. Выпишем это уравнение отдельно

$$-(u_2 + u_3 + u_5 + u_6) + 4u_7 = h^2 f. \quad (6)$$

Узлы, значения приближенного решения в которых использованы при написании этого уравнения, изображены на рис. 9

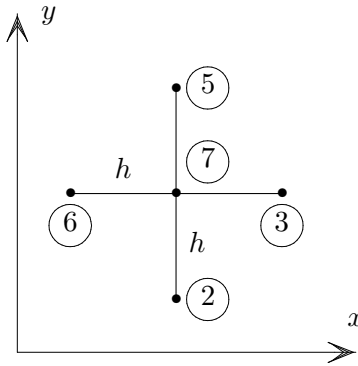


Рис. 9

Если (x, y) - координаты седьмого узла, то координаты второго, третьего, пятого и шестого суть $(x, y-h)$, $(x+h, y)$, $(x, y+h)$, $(x-h, y)$. Поделим уравнение (6) на h^2 и перепишем с учетом того, что $u_i = u^h(x_i, y_i)$. Будем иметь

$$\frac{u^h(x+h, y) - 2u^h(x, y) + u^h(x-h, y)}{h^2} - \frac{u^h(x, y+h) - 2u^h(x, y) + u^h(x, y-h)}{h^2} = f.$$

Но это уравнение есть не что иное, как классическая пятиточечная аппроксимация уравнения Пуассона (8.1). Вводя сокращенные обозначения

для разностных отношений

$$v_x = \frac{v(x+h, y) - v(x, y)}{h}, \quad v_{\bar{x}} = \frac{v(x, y) - v(x-h, y)}{h}, \quad v_{\bar{x}\bar{x}} = (v_{\bar{x}})_x \quad (7)$$

и т.д., вышеприведенное уравнение запишем так

$$-(u_{\bar{x}\bar{x}}^h + u_{\bar{y}\bar{y}}^h) = f. \quad (8)$$

Очевидно, что при достаточной гладкости решения уравнения (8.1) погрешность аппроксимации уравнения (8.1) уравнением (8) в точке (x, y) есть величина $O(h^2)$.

Помимо седьмого уравнения системы (4) заслуживает внимания и уравнение с номером 2. Это уравнение также будет окончательно сформировано, если предположить, что участок границы $\partial\Omega_2$ является отрезком прямой, проходящей через узлы 1, 2 и 8. Указанное уравнение имеет вид

$$-\frac{1}{2}u_1 + 2u_2 - u_7 - \frac{1}{2}u_8 = \frac{h^2 f}{2}. \quad (9)$$

Для написания уравнения (9) использованы значения приближенного решения в узлах, изображенных на рис. 10. Пусть (x, y) — координаты

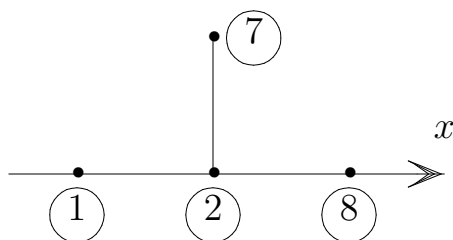


Рис. 10

узла с номером 2. Тогда координаты узлов 1, 7, 8 суть $(x-h, y)$, $(x, y+h)$ и $(x+h, y)$. Поделим уравнение (9) на h и перепишем в виде

$$-\frac{u^h(x, y+h) - u^h(x, y)}{h} - \frac{h u^h(x-h, y) - 2u^h(x, y) + u^h(x+h, y)}{h^2} = \frac{h}{2}f.$$

С учетом обозначений (7) будем иметь

$$-u_y^h - \frac{h}{2}u_{\bar{x}\bar{x}}^h = \frac{h}{2}f. \quad (10)$$

Уравнение (10) совпадает с хорошо известной разностной аппроксимацией граничного условия (8.3) для уравнения Пуассона (8.1), когда $\partial\Omega_2$ образована отрезком прямой, параллельной от Ox , а направление нормали к $\partial\Omega_2$, внешней по отношению к Ω , противоположно оси Oy . Остальные уравнения системы (4) также могут рассматриваться как разностные аппроксимации граничного условия (8.3), однако они менее поучительны по сравнению с рассматриваемыми нами уравнениями 2 и 7.

3. Упражнения

1. Выписать матрицу жесткости треугольного элемента, изображенного на рис. 3, при условии, что узлы пронумерованы, начиная с вершины прямого угла.

а) Выполнить задание путем непосредственных вычислений.

б) Ввести матрицу индексов, рассматривая элемент из рис. 3 (вместе с нумерацией узлов) как исходный, а новый элемент (элемент с новой нумерацией узлов) как часть композиции.

2. Выписать матрицу жесткости и вектор нагрузки правильного треугольника. Написать общее уравнение системы при такой триангуляции. (Аналог уравнения (6))

3. Исследовать погрешность аппроксимации граничного условия (8.3) уравнением (10).

4. Написать аналог уравнения (10) для случая граничного условия третьего рода.

5. Исследовать погрешность аппроксимации уравнения (8.1) разностным уравнением из упражнения 2.

6. Выписать аналог системы (5) для случая, когда на $\partial\Omega_1$ задано неоднородное условие: $u|_{\partial\Omega_1} = u_0 = \text{const}$.

7. Выписать матрицу жесткости конечного элемента, изображенного на рис. 3, отвечающую билинейной форме из упражнения 8.5. Показать, что применительно к уравнению $-\Delta u + \partial u / \partial x = f$, аналогом уравнения (6) является следующее уравнение:

$$-(u_2 + u_3 + u_5 + u_6) + 4u_7 + \frac{h}{6}(-u_1 + u_2 + 2u_3 + u_4 - u_5 - 2u_6) = h^2 f.$$